Diskreta markovmodeller

Harald Nautsch

Markovkällor

Antag att vi har en källa som ger ifrån sig en sekvens $\{x_n\}$ som utdata. Om de betingade sannolikheterna för utfallet x_n i tidpunkten n bara beror av de k föregående utfallen, dvs

$$p(x_n|x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}\ldots) = p(x_n|x_{n-1}\ldots x_{n-k})$$

sägs källan vara en *markovkälla av ordning* k. En markovkälla har alltså ett begränsat minne k steg tillbaka.

Om alfabetet har storleken N kan markovkällan beskrivas som en tillståndsmodell, där vi har N^k stycken tillstånd $(x_{n-1}\ldots x_{n-k})$ och där vi går från tillstånd $(x_{n-1}\ldots x_{n-k})$ till tillstånd $(x_n\ldots x_{n-k+1})$ med sannolikheten $p(x_n|x_{n-1}\ldots x_{n-k})$. Dessa sannolikheter brukar kallas *övergångssannolikheter*. Vi kan benämna tillstånden med s_i där $i = 1\ldots N^k$.

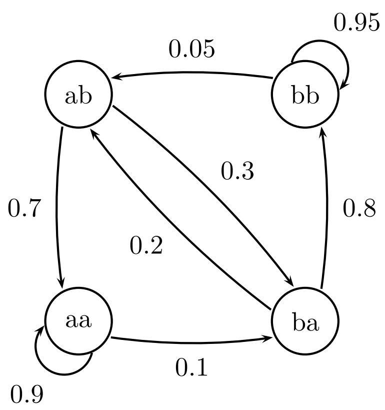
Exempel

Antag att vi har en markovkälla av ordning 2 med alfabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ och övergångssannolikheterna

$$p(a|aa) = 0.9 \; ; \; p(b|aa) = 0.1 \; ; \; p(a|ab) = 0.7 \; ; \; p(b|ab) = 0.3$$

$$p(a|ba) = 0.2 \; ; \; p(b|ba) = 0.8 \; ; \; p(a|bb) = 0.05 \; ; \; p(b|bb) = 0.95$$

Notera att övergångssannolikheterna för varje tillstånd måste summera till 1. Vi kan rita markovkällan som nedanstående tillståndsgraf:



□

Stationär fördelning

Vi vill kunna räkna ut sannolikheten att vi vid en godtycklig tidpunkt står i ett givet tillstånd, den s.k. *stationära fördelningen*. Markovkällan kan beskrivas med hjälp av sin *övergångsmatris* $\mathbf{P}$. Denna matris har på rad i och kolumn j sannolikheten att vi går från tillstånd s_i till tillstånd s_j.

Exempel, forts.

För vår exempelkälla har vi, om vi sätter $s_1 = aa, s_2 = ab, s_3 = ba$ och $s_4 = bb$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0.95 \end{pmatrix}$$

□

Antag att vi i tidpunkten n står i tillstånd s_i med sannolikheten p_i^n. Fördelningen för tidpunkten $n+1$ kan då räknas ut som

$$[p_1^{n+1} \; p_2^{n+1} \; \ldots \; p_{N^k}^{n+1}] = [p_1^n \; p_2^n \; \ldots \; p_{N^k}^n] \cdot \mathbf{P}$$

Låter vi nu n gå mot oändligheten, får vi den stationära fördelningen. Vi betecknar den stationära sannolikheten att vi står i tillstånd s_i med w_i och den stationära fördelningen med $\bar{w} = [w_1 \; w_2 \; \ldots \; w_{N^k}]$. Vi kan då få den stationära fördelningen genom att lösa ekvationssystemet

$$\bar{w} = \bar{w} \cdot \mathbf{P}$$

eller

$$\bar{w} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{I}) = \bar{0}$$

Detta ekvationssystem är underbestämt. För att kunna lösa det måste vi stryka en ekvation och ersätta den med $\sum_{i=1}^{N^k} w_i = 1$ (w_i är ju sannolikheter och måste därför summera till 1).

Exempel, forts.

Lös

$$\bar{w} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{I}) = \bar{w} \cdot \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.7 & -1 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 & -1 & 0.8 \\ 0 & 0.05 & 0 & -0.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ersätt den tredje ekvationen med $\sum_{i=1}^{N^k} w_i = 1$ istället (det spelar ingen roll vilken ekvation vi väljer). Lös alltså ekvationssystemet

$$\bar{w} \cdot \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.05 & 1 & -0.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.04 & 0.04 & 0.64 \end{pmatrix}$$

D.v.s. vi står alltså i tillstånd aa med sannolikheten 0.28, i tillstånd ab eller ba med sannolikheten 0.04 vardera och i tillstånd bb med sannolikheten 0.64. □

Sannolikheter för symbolsekvenser

Genom att beräkna sannolikheterna för de olika tillstånden har vi också beräknat sannolikheterna för k-tupler av källsymboler. Vi kan ur denna fördelning förstås också beräkna sannolikheterna för kortare sekvenser genom att helt enkelt räkna ut marginalfördelningar, dvs om vi vill veta sannolikheterna för n-tupler, $n < k$ summerar vi bara ihop de sannolikheter där de n första symbolerna är lika.

Exempel, forts.

$$p(a) = p(aa) + p(ab) = 0.28 + 0.04 = 0.32$$

$$p(b) = p(ba) + p(bb) = 0.04 + 0.64 = 0.68$$

$\square$

Vi kan också beräkna sannolikheterna för längre symbolsekvenser genom att använda övergångssannolikheterna. Till exempel har vi för tripplar $p(x_{i+2}x_{i+1}x_i) = p(x_{i+1}x_i) \cdot p(x_{i+2}|x_{i+1}x_i)$.

Exempel, forts.

$$\begin{aligned}
p(aaa) &= p(aa) \cdot p(a|aa) = 0.28 \cdot 0.9 = 0.252 \\
p(aab) &= p(ab) \cdot p(a|ab) = 0.04 \cdot 0.7 = 0.028 \\
p(aba) &= p(ba) \cdot p(a|ba) = 0.04 \cdot 0.2 = 0.008 \\
p(abb) &= p(bb) \cdot p(a|bb) = 0.64 \cdot 0.05 = 0.032 \\
p(baa) &= p(aa) \cdot p(b|aa) = 0.28 \cdot 0.1 = 0.028 \\
p(bab) &= p(ab) \cdot p(b|ab) = 0.04 \cdot 0.3 = 0.012 \\
p(bba) &= p(ba) \cdot p(b|ba) = 0.04 \cdot 0.8 = 0.032 \\
p(bbb) &= p(bb) \cdot p(b|bb) = 0.64 \cdot 0.95 = 0.608
\end{aligned}$$

$\square$

Entropitakt för markovkällor

Entropitakten för en markovkälla ges av

$$\lim_{n\to\infty} H(X_n|X_1X_2\ldots X_{n-1}) = H(X_n|X_{n-1}\ldots X_{n-k})$$

p.g.a. det begränsade minnet. Entropitakten kan även räknas ut som medelvärdet för entropin i de olika tillstånden:

$$\sum_{j=1}^{N^k} w_j \cdot H(S_{i+1}|S_i = s_j)$$

S_i är en stokastisk process som beskriver sekvensen av tillstånd. $H(S_{i+1}|S_i = s_j)$ är entropin för de utgående sannolikheterna i tillstånd s_j.

Exempel, forts.

$$\begin{aligned}
H(X_n|X_{n-1}\ldots X_{n-k}) &= -0.252\cdot\log 0.9 - 0.028\cdot\log 0.7 \\
&\quad -0.008\cdot\log 0.2 - 0.032\cdot\log 0.05 \\
&\quad -0.028\cdot\log 0.1 - 0.012\cdot\log 0.3 \\
&\quad -0.032\cdot\log 0.8 - 0.608\cdot\log 0.95 \\
&\approx \underline{0.3787}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N^k} w_j \cdot H(S_{i+1}|S_i = s_j) &= 0.28\cdot(-0.1\cdot\log 0.1 - 0.9\cdot\log 0.9) + \\
&\quad 0.04\cdot(-0.7\cdot\log 0.7 - 0.3\cdot\log 0.3) + \\
&\quad 0.04\cdot(-0.2\cdot\log 0.2 - 0.8\cdot\log 0.8) + \\
&\quad 0.64\cdot(-0.05\cdot\log 0.05 - 0.95\cdot\log 0.95) \approx \\
&\approx \underline{0.3787}
\end{aligned}$$

$\square$